

Clasa a III-a

1. a) De la 7 : 45 la 13 : 35 sunt 6 "jumătăți" de oră: 8.30, 9.30, 10.30, 11.30, 12.30 și 13.30, pentru care ceasul bate de 6 ori.

Apoi, la orele fixe ceasul va bate de încă $8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 1 = 51$ ori (la ora 13 bate doar o singură dată).

În total ceasul bate de $51 + 6 = 57$ ori.

b) $10 = 1 + 2 + 7 = 1 + 3 + 6 = 1 + 4 + 5 = 2 + 3 + 5$.

2. Numărul maxim de baghete care pot fi oferite este 28 și se obține dacă întârzie toți cei 7 prieteni:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28.$$

Dar s-au oferit 22 de baghete. Cum $28 - 22 = 6$ și $6 = 1 + 2 + 3$, rezultă că au 3 prieteni au venit la timp și au întârziat $7 - 3 = 4$ prieteni.

3. Sunt $2 + 3 + 5 + 7 = 17$ familii cu cel puțin doi copii, iar în aceste familii sunt 51 de copii.

Restul de copii provin din familiile cu un copil, deci sunt $60 - 51 = 9$ familii cu un copil

Înseamnă că sunt $30 - 9 - 17 = 4$ familii fără copii.

4. Magicianul are 47 de bile albe (10 în cutia roșie, 20 în cea albastră și 17 în cea galbenă) și 55 de bile negre (18 în cutia roșie, 22 în cea albastră și 15 în cea galbenă). În total are 102 bile.

Clasa a IV-a

1. a) Suma este 240. b) Diferența dintre rezultatele obținute provine din numerele cărora li s-a schimbat semnul.

Cum $240 - 118 = 122$, rezultă că suma numerelor cu semnul schimbat este $122 : 2 = 61$. Singurele numere cu suma 61 din suma dată sunt 25 și 36.

2. Ca să poată împrejmuî grădina cu 5 rânduri, folosind 850 m de sârmă, perimetrul grădinii ar trebui să fie $850 : 5 = 170$ m. Dacă lățimea rămâne la fel, atunci lungimea ar trebui să fie egală cu $(170 - 2 \times 30) : 2 = 55$ m. Deci lungimea trebuie micșorată cu $65 - 55 = 10$ m.

3. Fie \overline{abcde} un număr ca în enunț. Cum a, b, c, d, e sunt distincte, rezultă că $a < b < c < d < e$ sau $a > b > c > d > e$ (nu putem avea diferențe în sens crescător și apoi descrescător, pentru că s-ar obține cifre egale). Sunt posibile soluțiile: 13579, 97531 și 86420.

4. Folosind o singură cifră impară, se pot numerota primele 5 pagini. Folosind numere de două cifre impare se pot numerota și următoarele $5 \times 5 = 25$ agini, iar cu numere de trei cifre impare se pot numerota următoarele $5 \times 5 \times 5 = 125$ de pagini.

Așadar, a 50-a pagină este a 20-a pagină numerotată cu trei cifre impare.

Cum sunt 25 de numere de trei cifre impare care încep cu 1, rezultă că numărul de pe a 50-a pagină începe cu 1, iar ultimele sale două cifre formează al douăzecelea număr format cu două cifre impare, adică 79. Numărul căutat este 179.

Clasa a V-a

1. Fie $a < b < c < d < e$ numerele considerate. **(1p)**

Atunci $b \geq a + 1$, $c \geq a + 2$, $d \geq a + 3$ și $e \geq a + 4$, deci $12 = a + b + c + d + e \geq 5a + 10$. Rezultă $5a \leq 2$, deci $a = 0$ **(1p)**

Ca urmare, $b + c + d + e = 12$, $b \geq 1$. La fel ca mai sus, avem $c \geq b + 1$, $d \geq b + 2$, $e \geq b + 3$, deci $12 = b + c + d + e \geq 4b + 6$, de unde $4b \leq 6$. Cum $b \geq 1$, rezultă $b = 1$. **(1p)**

Obținem $c \geq 2$ și $c + d + e = 11$. Apoi, din $d \geq c + 1$, $e \geq c + 2$, deci $11 = c + d + e \geq 3c + 3$, de unde $3c \leq 8$, adică $c \leq 2$. Cum $c \geq 2$, rezultă $c = 2$ și $d + e = 9$. **(1p)**

Soluții sunt $d = 3$ și $e = 6$ sau $d = 4$ și $e = 5$. **(1p)**

Cele 5 numere pot fi 0, 1, 2, 3, 6 care au suma pătratelor 50, și 0, 1, 2, 4, 5, care au suma pătratelor 46. **(2p)**

2. Resturile împărțirilor numerelor naturale la 20 sunt mai mici decât 20. **(1p)**

Însumând cele mai mici unsprezece numere naturale nepreme obținem

$$0 + 1 + 4 + 6 + 8 + 9 + 10 + 12 + 14 + 15 + 16 = 95 < 113. \quad \text{(2p)}$$

Însumând cele mai mici unsprezece numere naturale nepreme și nenule obținem

$$1 + 4 + 6 + 8 + 9 + 10 + 12 + 14 + 15 + 16 + 18 = 113. \quad \text{(2p)}$$

Deoarece suma resturilor trebuie să fie mai mare decât 113 și termenii sumei sunt diferiți și mai mici decât 20, rezultă cel puțin unul dintre resturile obținute este număr prim. **(2p)**

3. Din enunț se obține $190b + 4d + 1 = 1000(d - a) + 70c + a$. **(2p)**

Rezultă de aici că $d - a \leq 1$, de unde $d = a$ sau $d = a + 1$. **(2p)**

Cazul $d = a$ conduce la contradicție, iar în cazul $d = a + 1$ se obține unica soluție $a = 5$, $b = 7$, $c = 5$, $d = 6$. **(3p)**

4. Dacă p^k se scrie ca suma a $n \geq 2$ numere naturale consecutive, iar cel mai mic dintre aceste numere este $m + 1$, rezultă că

$$p^k = (m + 1) + (m + 2) + \dots + (m + n) = mn + \frac{n(n + 1)}{2},$$

de unde rezultă că $n(2m + n + 1) = 2p^k$. **(2p)**

Cum $n < 2m + n + 1$, iar p este prim, sunt posibile două situații:

$$(a) \begin{cases} n = 2p^a \\ 2m + n + 1 = p^{k-a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 2p^a \\ m = \frac{p^{k-a} - 2p^a - 1}{2} \end{cases}, \text{ unde } a \in \mathbb{N}, a \leq k.$$

Cum $n < 2m + n + 1$, rezultă $2p^a < p^{k-a}$ și, având în vedere că $p \geq 3$, rezultă $a < k - a \Leftrightarrow 2a < k$.

• Dacă k este par, $k = 2s$, numărul a poate lua valorile 0, 1, ..., $s - 1$, deci sunt s valori.

• Dacă $k \geq 3$ este impar, $k = 2s + 1$, numărul a poate lua valorile 0, 1, ..., s , deci sunt $s + 1$ valori.

$$(b) \begin{cases} n = p^a \\ 2m + n + 1 = 2p^{k-a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = p^a \\ m = \frac{2p^{k-a} - p^a - 1}{2} \end{cases}, \text{ unde } a \in \mathbb{N}, a \leq k.$$

La fel, din $n < 2m + n + 1$, rezultă $p^a < 2p^{k-a}$ și, având în vedere că $p \geq 3$, rezultă $a \leq k - a \Leftrightarrow 2a \leq k$. În plus, cum $n = p^a \geq 2$, rezultă $a \neq 0$.

• Dacă k este par, $k = 2s$, numărul a poate lua valorile 1, ..., s , adică s valori.

• Dacă $k \geq 3$ este impar, $k = 2s + 1$, numărul a poate lua valorile 1, ..., s , adică s valori. **(4p)**

Numind "soluție" o modalitate de scriere a numărului p^k ca sumă de n numere consecutive, din analiza cazurilor (a) și (b), rezultă că atunci când k este par, $k = 2s$, se obțin s soluții în cazul (a) și s soluții în cazul (b), adică $2s = k$ soluții în total, iar atunci k este impar, se obțin $2s + 1 = k$ soluții ($s + 1$ soluții în cazul (a) și s soluții în cazul (b)). În fiecare caz obținem k moduri de scriere.

Observație: În cazul $k = 1$, se obține $a = 0$, $n = 2$, deci $p = \frac{p-1}{2} + \frac{p+1}{2}$. Având în vedere că pentru $p = 3$, avem $\frac{p-1}{2} = 1$, sunt posibile două scrieri ale lui $p = 3$ ca sumă de numere naturale consecutive: $3 = 1 + 2 = 0 + 1 + 2$. **(1p)**

Clasa a VI-a

1. Presupunem prin absurd că $a \neq b$, spre exemplu $a > b$. Atunci:

$$a + 2^b = b + 2^a \Rightarrow 2^a - 2^b = a - b \Rightarrow 2^b (2^{a-b} - 1) = a - b. \quad (2p)$$

Notând $a - b = m$, $m \in \mathbb{N}^*$, rezultă $2^b (2^m - 1) = m$, de unde $2^m - 1 \leq m$. **(2p)**

Dar $2^m - 1 = \underbrace{1 + 2 + \dots + 2^{m-1}}_{m \text{ termeni}} \geq m$, de unde rezultă că $2^m - 1 = m$. Atunci $2^b = 1$, adică $b = 0$, ceea ce

nu este posibil. **(2p)**

Așadar, presupunerea făcută este falsă, deci $a = b$. **(1p)**

2. Fie x numărul căutat. Conform ipotezei, $x = 3a + 1 = 5b + 2 = 7c + 3$, unde $a, b, c \in \mathbb{N}^*$. **(1p)**

Din egalitatea $3a = 5b + 1$ rezultă $3 \mid 5b + 1 \Rightarrow 3 \mid b - 1 \Rightarrow b = 3k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, deci $x = 15k + 7$. **(2p)**

Deoarece $x = 7c + 3$, rezultă $15k + 7 = 7c + 3$, de unde $7 \mid 15k + 4$. Obținem $7 \mid k + 4$, deci $k = 7p + 3$, unde $p \in \mathbb{N}$. Ca urmare, $x = 105p + 52$. **(2p)**

Impunând condiția $x \leq 9999$, rezultă $105p + 52 \leq 9999$, de unde $p \leq 94$. Se obține $x = 105 \cdot 94 + 52 = 9922$. **(2p)**

3. Suma din enunț conține $p + 1$ termeni de forma $(a, a + 6)$, unde $a \in \mathbb{N}$.

Dacă $d = (x, x + 6)$, unde $x \in \mathbb{N}$, atunci, din $d \mid x$ și $d \mid x + 6$ rezultă $d \mid 6$, deci $d \in \{1, 2, 3, 6\}$. **(2p)**

Apoi, dacă $d = (x, x + 6)$, atunci $d = (x + 6, x + 12)$ și, în general, $d = (x + 6y, x + 6z)$, pentru orice $y, z \in \mathbb{N}$. Obținem:

- dacă $x = 6k$, $k \in \mathbb{N}$, atunci $(x, x + 6) = (6k, 6k + 6) = 6$
- dacă $x = 6k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, atunci $(x, x + 6) = (6k + 1, 6k + 7) = (1, 7) = 1$
- dacă $x = 6k + 2$, $k \in \mathbb{N}$, atunci $(x, x + 6) = (6k + 2, 6k + 8) = (2, 8) = 2$
- dacă $x = 6k + 3$, $k \in \mathbb{N}$, atunci $(x, x + 6) = (6k + 3, 6k + 9) = (3, 9) = 3$
- dacă $x = 6k + 4$, $k \in \mathbb{N}$, atunci $(x, x + 6) = (6k + 4, 6k + 10) = (4, 10) = 2$
- dacă $x = 6k + 5$, $k \in \mathbb{N}$, atunci $(x, x + 6) = (6k + 5, 6k + 11) = (5, 11) = 1$ **(2p)**

Împărțim suma dată în succesiuni de 6 termeni, fiecare succesiune având suma $6 + 1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 15$. **(2p)**

Întrucât $2010 = 134 \cdot 15$, rezultă că suma dată conține exact $134 \cdot 6 = 804$ termeni, adică $p + 1 = 804$, de unde $p = 803$. **(1p)**

4. Numerele prime cu 10 sunt cele care au ultima cifră 1, 3, 7, 9. **(1p)**

Dacă ultima cifră a numărului p este 1, atunci ultima cifră a lui $9p$ este 9, deci $0 = a_{9p} = a_9 + a_p$, de unde rezultă $a_p = 0$. **(2p)**

Dacă ultima cifră a numărului p este 3, atunci ultima cifră a lui $3p$ este 9, deci $0 = a_{3p} = a_3 + a_p$, de unde rezultă $a_p = 0$. **(2p)**

Dacă ultima cifră a numărului p este 7, atunci ultima cifră a lui $7p$ este 9, deci $0 = a_{7p} = a_7 + a_p$, de unde rezultă $a_p = 0$. **(2p)**

Clasa a VII-a

1. Să presupunem că există numerele prime impare $p_1 < p_2 < \dots < p_n$ ($n \geq 2$) astfel încât

$$p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2 = 2010.$$

(1p) (1.1)

Întrucât pătratul oricărui număr prim impar este de forma $8k + 1$ ($k \in \mathbb{N}^*$), (1p) rezultă că $2010 = M_8 + n$, (1p) deci $n = M_8 + 2 \in \{2, 10, 18, \dots\}$. (1p)

Pentru $n \geq 10$, observăm că primele 10 numere prime impare sunt 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31 și $23^2 + 29^2 + 31^2 = 2331 > 2010$, egalitatea (*) nu poate avea loc. (1p)

Pentru $n = 2$, rezultă că $p_1^2 + p_2^2 = 2010$. Dacă $p_1 = 3$, rezultă $p_2^2 = 2001$, imposibil. Dacă $p_1 > 3$, atunci p_1^2 și p_2^2 sunt de forma $M_3 + 1$, deci $2010 = M_3 + 2$, fals. (2p)

2. Suma numerelor de la 1 la 2010 este $1005 \cdot 2011$. (1p)

Împărțind numerele de la 1 la 2010 în grupe de câte 15 numere, obținem 134 de grupe. (2p)

Atunci, pentru orice ordonare, există o grupă cu suma termenilor egală sau mai mare decât $1/134$ din suma numerelor de la 1 la 2010, adică 15082,5, deci cel puțin egală cu 15083 = $7 \cdot 2011 + 1006$. (2p)

Construcția unei ordonări în care nu există 15 termeni cu suma mai mare de 15083. (2p)

3. Soluțiile sunt $x = z = 1, y = 0$ și $x = 2, y = 1, z = 2$.

Dacă $y = 0$ atunci :

• pentru $x = 1$ avem soluția $x = z = 1$; (1p)

• pentru $x \geq 2$, analizând modulo 9, deducem z par, $z = 2t$. În acest ultim caz ecuația este $3^x = (7^t - 2)(7^t + 2)$, deci ambele paranteze trebuie să fie puteri naturale ale lui 3 – imposibil, deoarece au diferența

4. (1p)

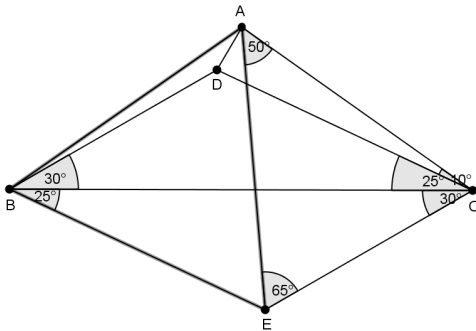
Dacă $y \geq 1$ atunci, analizând modulo 5, rezultă din nou z par, $z = 2t$, deci ecuația devine $3^x 5^y = (7^t - 2)(7^t + 2)$. Deoarece diferența celor două paranteze este 4, doar una dintre ele poate fi divizibilă cu 3, respectiv 5, (1p) deci sunt posibile cazurile :

• $7^t - 2 = 1, 7^t + 2 = 3^x 5^y$ – imposibil;

• $7^t - 2 = 3^x, 7^t + 2 = 5^y$ – imposibil, deoarece $7^t - 2$ nu poate fi divizibil cu 3; (2p)

• $7^t - 2 = 5^y, 7^t + 2 = 3^x$, caz în care $3^x - 5^y = 4$. Situația $y = 0$ nu convine, iar pentru $y \geq 1$, analizând modulo 5 deducem x par, $x = 2u$, apoi $5^y = (3^u - 2)(3^u + 2)$, egalitate posibilă doar pentru $u = 1$. În acest caz obținem $x = 2, y = 1, z = 2$. (2 p)

4. Avem $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ACB}) = 35^\circ$ și $m(\widehat{DBC}) = 30^\circ, m(\widehat{DCB}) = 25^\circ$. (1p)



Fie $E \in \text{Int}(\widehat{BAC})$ astfel încât triunghiul ABE să fie echilateral. (3p)

Atunci $m(\widehat{EBC}) = m(\widehat{DCB}) = 25^\circ$, de unde $CD \parallel BE$.

Deoarece $m(\widehat{CAE}) = 50^\circ$ și $[AE] \equiv [AB] \equiv [AC]$, triunghiul AEC este isoscel și $m(\widehat{AEC}) = m(\widehat{ACE}) = 65^\circ$.

Rezultă $m(\widehat{BCE}) = 30^\circ = m(\widehat{DBC})$, deci $BD \parallel CE$.

Ca urmare, patrulaterul $BECD$ este paralelogram, de unde obținem $[CD] \equiv [BE] \equiv [AB] \equiv [AC]$, adică triunghiul CAD

este isoscel. Obținem $m(\widehat{ADC}) = \frac{1}{2} (180^\circ - m(\widehat{ACD})) = 85^\circ$. (3p)

Clasa a VIII-a

1. Dacă (x, y) este soluție, atunci $x + y > 0$. Presupunând $x + y > 1$ obținem din prima ecuație

$$1 = x^2 + y^2 + \frac{2xy}{x+y} > \frac{x^2 + y^2}{x+y} + \frac{2xy}{x+y} = \frac{(x+y)^2}{x+y} = x+y > 1, \quad (3p)$$

fals. O contradicție similară se obține presupunând $x + y < 1$. Ca urmare, $x + y = 1$ și din a doua ecuație se obțin soluțiile $x_1 = 1$ și $x_2 = -2$. Soluțiile sunt $(1, 0)$ și $(-2, 3)$. **(4p)**

2. Frațiile din șir egale cu numărul rațional $\frac{1}{2}$ sunt de forma $\frac{k}{2k}$, unde $k \in \mathbb{N}^*$. **(2p)**

În grupul de fracții de forma $\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}, \frac{n}{n-1}, \frac{n}{n-2}, \dots, \frac{n}{1}\right)$ – care conține $2n - 1$ fracții – apare numărul rațional $\frac{1}{2}$ dacă și numai dacă n este par, iar într-un astfel de grup este a n -a fracție. **(2p)**

Ca urmare, $\frac{1}{2}$ apare a n -a oară pe poziția

$$1 + 3 + 5 + \dots + [2 \cdot (2n - 1) - 1] + n = (2n - 1)^2 + n = 4n^2 - 3n + 1. \quad (2p)$$

Ca urmare, $a_{2010} = 4019^2 + 2010 = 16\,154\,371$. **(1p)**

3. (\Rightarrow) Dacă triunghiul ABC este echilateral, atunci centrul cercului înscris coincide cu centrul de greutate, iar A', B', C' sunt mijloacele laturilor triunghiului. Rezultă $AA' = BB' = CC' = 3r$, de unde se obține egalitatea din enunț. **(2p)**

(\Leftarrow) Întrucât $[AB'] \equiv [AC']$, $[BC'] \equiv [BA']$ și $[CA'] \equiv [CB']$, rezultă $\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$. Conform reciprocei teoremei lui Ceva, dreptele AA', BB' și CC' sunt concurente într-un punct P . **(1p)**

Notând $S = \sigma[ABC]$, rezultă $\frac{PA'}{AA'} = \frac{\sigma[PBC]}{S}$, de unde

$$\frac{1}{AA'} = \frac{1}{S} \cdot \frac{\sigma[PBC]}{PA'} = \frac{1}{S} \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot BC \cdot \text{dist}(P, BC)}{PA'} \leq \frac{1}{2S} \cdot \frac{BC \cdot PA'}{PA'} = \frac{BC}{2S},$$

cu egalitate dacă și numai dacă $PA' = \text{dist}(P, BC)$, sau altfel spus, $AA' \perp BC$. **(2p)**

Analog se obține că $\frac{1}{BB'} \leq \frac{CA}{2S}$ și $\frac{1}{CC'} \leq \frac{AB}{2S}$, cu egalitate dacă și numai dacă $BB' \perp CA$ și $CC' \perp AB$.

Sumând inegalitățile obținute, rezultă

$$\frac{1}{AA'} + \frac{1}{BB'} + \frac{1}{CC'} \leq \frac{AB + BC + CA}{2S} = \frac{p}{S} = \frac{1}{r}.$$

Relația din enunț corespunde cazului de egalitate, deci $AA' \perp BC$, $BB' \perp CA$ și $CC' \perp AB$, adică P este ortocentrul triunghiului ABC .

Deoarece $AA' \perp BC$ și $IA' \perp BC$, rezultă că $I \in AA'$ și analog, $I \in BB', I \in CC'$. Ca urmare, în triunghiul ABC , centrul cercului înscris și ortocentrul coincid, deci triunghiul este echilateral. **(2p)**

4. Notând $M_n = \text{cmmmc}[1, 2, \dots, n]$, se obține, prin calcul, că $M_7 = 420$, $M_8 = 840$, $M_9 = M_{10} = 2520$. **(1p)**

Egalitatea $M_9 = M_{10}$ apare întrucât factorii primi din descompunerea lui 10 sunt deja în mulțimea factorilor primi ai numerelor din mulțimea $\{1, 2, \dots, 9\}$. Suntem conduși la ideea că $M_{n-1} = M_n$ dacă și numai dacă n nu este de forma p^k (o putere a unui prim). **(2p)**

Vom demonstra acest lucru. Dacă n nu este de forma p^k , atunci n se poate reprezenta sub forma $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$, unde $r \geq 2$. Fiecare $p_i^{\alpha_i}$ este mai mic decât n , deci este factor al lui M_{n-1} , adică $M_{n-1} = M_n$. **(2p)**

Dacă $M_{n-1} = M_n$, atunci, presupunând că $n = p^\alpha$, rezultă că p^α nu poate apare în descompunerea în factori a niciunui număr din mulțimea $\{1, 2, \dots, n-1\}$. Dar $M_{n-1} = M_n$, deci p^α este factor în descompunerea unuia dintre numerele $1, 2, \dots, n-1$, contradicție. **(2p)**

Clasa a IX-a**1. Adunând inegalitatea**

$$\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} + \frac{1}{18 \cdot 81} \cdot \frac{1}{a^2 b^2} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{a^2}{2} \cdot \frac{b^2}{2} \cdot \frac{1}{18 \cdot 81} \cdot \frac{1}{a^2 b^2}} = \frac{1}{6} \quad (0)$$

cu analogele, obținem $a^2 + b^2 + c^2 + \frac{1}{18 \cdot 81} \left(\frac{1}{a^2 b^2} + \frac{1}{a^2 c^2} + \frac{1}{b^2 c^2} \right) \geq \frac{1}{2}$. **(1p)** (1)

Din inegalitatea mediilor, avem $\frac{1}{9} = a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$, deci $abc \leq \frac{1}{27}$, sau, echivalent, $\frac{1}{abc} \geq 27$. **(1p)**

Atunci $\frac{1}{a^2 b^2} + \frac{1}{a^2 c^2} + \frac{1}{b^2 c^2} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{(abc)^4}} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{27^4} = 243$, **(1p)** de unde rezultă

$$\left(1 - \frac{1}{18 \cdot 81}\right) \left(\frac{1}{a^2 b^2} + \frac{1}{a^2 c^2} + \frac{1}{b^2 c^2}\right) \geq \left(1 - \frac{1}{18 \cdot 81}\right) \cdot 243 = \frac{1457}{6} \quad (2p) \quad (2)$$

Adunând inegalitățile (1) și (2), rezultă $a^2 + b^2 + c^2 + \frac{1}{a^2 b^2} + \frac{1}{a^2 c^2} + \frac{1}{b^2 c^2} \geq \frac{1}{2} + \frac{1457}{6} = \frac{730}{3}$. Egalitatea are loc pentru $a = b = c = \frac{1}{3}$. **(1p)**

Comentariu metodic. Inegalitatea (0) se deduce exploataând cazul de egalitate $a = b = c = \frac{1}{3}$. Astfel, căutăm $\alpha > 0$ astfel încât, în suma $\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} + \alpha \cdot \frac{1}{a^2 b^2}$, cei trei termeni ai sumei să fie egali pentru $a = b = \frac{1}{3}$. Se obține $\frac{1}{18} = \alpha \cdot 81$, de unde $\alpha = \frac{1}{18 \cdot 81}$.

2. Notăm cu λ valoarea comună a rapoartelor din enunț. Avem

$$\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{r_M} - \overrightarrow{r_N} = \left(\frac{1}{1-\lambda} \overrightarrow{r_B} + \frac{\lambda}{1-\lambda} \overrightarrow{r_C}\right) - \left(\frac{1}{1-\lambda} \overrightarrow{r_P} + \frac{\lambda}{1-\lambda} \overrightarrow{r_Q}\right) = \frac{1}{1-\lambda} \overrightarrow{PB} + \frac{\lambda}{1-\lambda} \overrightarrow{QC}. \quad (2p) \quad (1)$$

Considerăm punctele $P' \in (AB)$ și $Q' \in (AC)$ astfel încât $[AP'] \equiv [PB]$ și $[AQ'] \equiv [QC]$. Dacă A' este punctul în care bisectoarea unghiului \widehat{BAC} intersectează $P'Q'$, atunci

$$\frac{A'P'}{A'Q'} = \frac{AP'}{AQ'} = \frac{PB}{QC} = \lambda. \quad (2p)$$

Ca urmare, $\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{1-\lambda} \overrightarrow{AP'} + \frac{\lambda}{1-\lambda} \overrightarrow{AQ'} = \frac{1}{1-\lambda} \overrightarrow{PB} + \frac{\lambda}{1-\lambda} \overrightarrow{QC}$. **(2p)** Din relația (1) rezultă $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{AA'}$, de unde se obține concluzia. **(1p)**

3. Din ipoteză rezultă relațiile

$$a_3 - a_1 = a_4 a_6 \dots a_{2n} (a_{2n+1} - a_{2n-1}) \quad (1)$$

$$a_4 - a_2 = a_5 a_7 \dots a_{2n+1} (a_{2n+2} - a_{2n}) \quad (2)$$

Deoarece $a_n > 0$ pentru $n \geq 3$, relațiile (1) și (2) arată că șirurile $S : a_1, a_3, a_5, \dots$ și $T : a_2, a_4, a_6, \dots$ sunt monotone.

În cazul $a_1 \neq a_3$ și $a_2 \neq a_4$, termenii șirului divid constante nenule, deci șirul este mărginit. Reiese că S și T sunt constante de la un rang încolo, iar din (1) și (2) deducem că S și T sunt constante „de la început” – contradicție.

În cazul $a_1 = a_3$ și $a_2 = a_4$ reiese că S și T sunt constante, iar aceste constante verifică $s + t + 2010 = st$, adică $(s-1)(t-1) = 2011$. Cum 2011 este prim, avem cazurile $s = 2, t = 2012$ și $s = 2012, t = 2$. **(3p)**

În cazul $a_1 \neq a_3$ și $a_2 = a_4$, T este constant și $a_3 - a_1 = t^{n-1} (a_{2n+1} - a_{2n-1})$, deci t^{n-1} divide numărătorul $a_3 - a_1$, ceea ce nu se poate decât dacă $t = 1$. În acest caz, $a_{2n} = 1$ și $(a_{2n+1})_{n \geq 0}$ este o progresie aritmetică cu rația 2011, deci $a_{2n+1} = a_1 + 2011n$. **(2p)**

În sfârșit, în cazul $a_1 = a_3$ și $a_2 \neq a_4$ obținem analog $a_{2n-1} = 1$ și $a_{2n} = a_2 + 2011n$. **(2p)**

4. Numim *convenabil* un număr n pentru care $[n\sqrt{2}]$ este o putere a lui 2. Presupunem că există doar un număr finit de numere *convenabile*. **(1p)**

Fie k astfel încât $2^k > [n\sqrt{2}]$, pentru orice n *convenabil*. Fie q unicul întreg pentru care $q\sqrt{2} < 2^k \leq (q+1)\sqrt{2}$ și $r = 2^k - q\sqrt{2}$; atunci $0 < r \leq \sqrt{2}$. **(2p)**

Există un unic întreg $j \geq 0$ pentru care $\frac{\sqrt{2}}{2} < 2^j r \leq \sqrt{2}$; atunci avem:

$$\sqrt{2} - 1 < 2^j r = 2^j (2^k - q\sqrt{2}) \leq \sqrt{2},$$

sau, echivalent,

$$(q \cdot 2^j + 1) \sqrt{2} - 1 < 2^{j+k} \leq (q \cdot 2^j + 1) \sqrt{2}. \quad \mathbf{(3p)}$$

Notând $q \cdot 2^j + 1 = m$, obținem $[m\sqrt{2}] = 2^{j+k}$, deci m este *convenabil*, contradicție cu definiția lui k . **(1p)**

Clasa a X-a

1. Pentru $y = 0$ obținem $f(x) = f(0) + x(g(x) + g(0))$, $\forall x \in \mathbb{R}$, și, ca urmare, $f(y) = f(0) + y(g(y) + g(0))$, $\forall y \in \mathbb{R}$. **(1p)** Scăzând aceste relații, obținem

$$f(x) - f(y) = xg(x) - yg(y) + (x - y)g(0) \Leftrightarrow (x - y)(g(x) + g(y)) = xg(x) - yg(y) + (x - y)g(0),$$

echivalent cu $x(g(y) - g(0)) = y(g(x) - g(0))$. **(2p)**

Pentru $y = 1$, rezultă $g(x) = x(g(1) - g(0)) + g(0)$ și, notând $a = g(1) - g(0)$ și $b = g(0)$, rezultă $g(x) = ax + b$, $\forall x \in \mathbb{R}$. **(2p)**

Atunci $f(x) = f(0) + x(ax + 2b) = ax^2 + 2bx + c$, unde am notat $c = f(0)$. **(2p)**

Prin înlocuire, se verifică faptul că funcțiile de forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ și $g(x) = ax + b$ sunt soluții ale ecuației funcționale din enunț, pentru orice $a, b, c \in \mathbb{R}$.

2. Notăm $|a| = |b| = |c| = r > 0$ și $p = abc$. Dacă $\alpha \stackrel{\text{not}}{=} a^2 + \frac{bc}{a} \in \mathbb{R}$, atunci $\alpha = \bar{\alpha}$, de unde

$$a^3 + bc = \frac{r^2(a^3 + r^2bc)}{abc} \Leftrightarrow \frac{r^2}{abc} = \frac{a^3 + bc}{a^3 + r^2bc} \Leftrightarrow \frac{r^2}{p} = \frac{a^4 + p}{a^4 + pr^2},$$

și, procedând analog, rezultă $\frac{r^2}{abc} = \frac{a^3 + bc}{a^3 + r^2bc} = \frac{b^3 + ca}{b^3 + r^2ca} = \frac{c^3 + ab}{c^3 + r^2ab}$. **(2p)** (1)

Apoi,

$$\frac{r^2}{abc} = \frac{(a^3 + bc) - (b^3 + ca)}{(a^3 + r^2bc) - (b^3 + r^2ca)} = \frac{a^3 - b^3 - c(a - b)}{a^3 - b^3 - r^2c(a - b)} \stackrel{a \neq b}{=} \frac{a^2 + ab + b^2 - c}{a^2 + ab + b^2 - r^2c} \quad \text{(2p)} \quad (2)$$

a) Dacă $a + b \neq 0$, adunând numărătorii și numitorii fracțiilor din mijloc în șirul de rapoarte egale (1) și simplificând cu $a + b$, obținem

$$\frac{r^2}{abc} = \frac{a^2 - ab + b^2 + c}{a^2 - ab + b^2 + r^2c}, \quad (3)$$

Din (2) și (3) rezultă

$$\frac{r^2}{abc} = \frac{a^2 + ab + b^2 - c}{a^2 + ab + b^2 - r^2c} = \frac{a^2 - ab + b^2 + c}{a^2 - ab + b^2 + r^2c} = \frac{(a^2 + ab + b^2 - c) + (a^2 - ab + b^2 + c)}{(a^2 + ab + b^2 - r^2c) + (a^2 - ab + b^2 + r^2c)} = 1,$$

deci $abc = r^2$, de unde $r^3 = |abc| = r^2$, adică $r = 1$ și în final $abc = 1$.

b) Dacă $a + b = 0$ și $a + c \neq 0$, procedând analog obținem tot $abc = 1$.

c) Dacă $a + b = 0$ și $a + c = 0$, rezultă $b = c$, fals. **(3p)**

3. Evident, $a > 1$, și atunci $2^a < 2^a + \log_2 a = n^2$, de unde rezultă $a < 2 \log_2 n$. **(1p)** Apoi, avem:

$$n^2 = 2^a + \log_2 a < 2^a + \log_2 (2 \log_2 n) \Rightarrow a > \log_2 [n^2 - \log_2 (2 \log_2 n)] = 2 \log_2 n + \log_2 \left(1 - \frac{\log_2 (2 \log_2 n)}{n^2}\right).$$

Este suficient să arătam că $\log_2 \left(1 - \frac{\log_2 (2 \log_2 n)}{n^2}\right) > -\frac{1}{n}$, echivalent cu $\left(1 - \frac{\log_2 (2 \log_2 n)}{n^2}\right)^n > \frac{1}{2}$. **(1p)**

Aplicând inegalitatea lui Bernoulli, avem

$$\left(1 - \frac{\log_2 (2 \log_2 n)}{n^2}\right)^n > 1 - n \cdot \frac{\log_2 (2 \log_2 n)}{n^2} = 1 - \frac{\log_2 (2 \log_2 n)}{n}, \quad \text{(3p)}$$

deci rămâne să demonstrăm acum că $1 - \frac{\log_2 (2 \log_2 n)}{n} > \frac{1}{2}$, sau, echivalent, $2 \log_2 (2 \log_2 n) < n$, adică $\log_2 n < 2^{\frac{n}{2}-1}$.

Notând $\log_2 n = p > 1$, rezultă $n = 2^p$, iar ultima inegalitate se scrie $p < 2^{2^{p-1}-1}$. Aplicând din nou inegalitatea lui Bernoulli, avem

$$2^{2^{p-1}-1} = (1+1)^{2^{p-1}-1} > 1 + 2^{p-1} - 1 = 2^{p-1} > 1 + (p-1) = p. \quad (\mathbf{2p})$$

4. (\Rightarrow) Presupunem că există o funcție f cu proprietatea \mathcal{P} . Vom arăta că $f(1) = n$. Într-adevăr, presupunând că există $k \geq 2$ astfel încât $f(k) = n$, rezultă:

$$\begin{aligned} g(k) &= f(1) + f(2) + \dots + f(k-1) + n - n \left[\frac{f(1) + f(2) + \dots + f(k-1) + n}{n} \right] = \\ &= f(1) + f(2) + \dots + f(k-1) + n - n \left[\frac{f(1) + f(2) + \dots + f(k-1)}{n} + 1 \right] = \\ &= f(1) + f(2) + \dots + f(k-1) + n - \left(n \left[\frac{f(1) + f(2) + \dots + f(k-1)}{n} \right] + 1 \right) = g(k-1), \end{aligned}$$

contradicție cu injectivitatea funcției g . Ca urmare, $f(1) = n$ și atunci $g(1) = 0$. ($\mathbf{2p}$)

Dacă n ar fi impar, din $g(n) = \frac{n(n+1)}{2} - n \left[\frac{n+1}{2} \right]$, ar rezulta $g(n) = 0 = g(1)$, contradicție. Ca urmare, n este par. ($\mathbf{1p}$)

(\Leftarrow) Vom demonstra că funcția $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$, $f(k) = \begin{cases} n+1-k, & k \text{ impar} \\ k-1, & k \text{ par} \end{cases}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$ este un număr par, are proprietatea \mathcal{P} .

Pentru orice $k \in \overline{1, \frac{n}{2}}$ avem: $\begin{cases} f(1) + f(2) + \dots + f(2k-1) = k(n-1) + 1 \\ f(1) + f(2) + \dots + f(2k) = k(n+1) \end{cases}$, deci

- $g(2k-1) = k(n-1) + 1 - n \left[\frac{k(n-1) + 1}{n} \right] = k(n-1) + 1 - n \cdot \left[k - \frac{k-1}{n} \right] = \begin{cases} 0, & k=1 \\ n-k+1, & k \geq 2 \end{cases}$.
- $g(2k) = k(n+1) - n \left[\frac{k(n+1)}{n} \right] = k(n+1) - n \cdot \left[k + \frac{k}{n} \right] = k(n+1) - nk = k$.

Este evident că dacă $a, b \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ au aceeași paritate, atunci $g(a) \neq g(b)$. Presupunând că există $k, j \in \overline{1, \frac{n}{2}}$ astfel încât $g(2k-1) = g(2j)$, ar rezulta $j = 0$ sau $j = n-k+1$, imposibil. Așadar g este injectivă. Deoarece domeniul de definiție și domeniul de valori al funcției g sunt mulțimi finite cu același cardinal, rezultă că g este bijectivă, deci f are proprietatea \mathcal{P} . ($\mathbf{4p}$)

Clasa a XI-a

1. Notând $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sigma(k)}{\tau(k)}$, avem $x_n = \sum_{j=1}^n \frac{(\sigma \circ \tau^{-1})(j)}{j} = \sum_{j=1}^n \frac{\varphi(j)}{j}$, unde $\varphi = \sigma \circ \tau^{-1} \in S_n$. **(2p)**

Cu un raționament standard, sau cu inegalitatea re-aranjamentelor, se probează că suma $\sum_{j=1}^n \frac{\varphi(j)}{j}$, cu $\varphi \in S_n$, este minimă când $\varphi(j) = j, \forall j = \overline{1, n}$ (adică $\varphi = e$) și maximă dacă $\varphi(j) = n - j + 1$, **(2p)** deci

$$n = \sum_{j=1}^n \frac{j}{j} \leq \sum_{j=1}^n \frac{\varphi(j)}{j} \leq \sum_{j=1}^n \frac{n-j+1}{j} = (n+1) \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) - n.$$

Rezultă că

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \frac{\sigma(k)}{\tau(k)} \leq \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{n} - \frac{1}{n}. \quad \text{(2p)}$$

Aplicând lema Cesaro-Stolz, rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{n} = 0$. Obținem $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \frac{\sigma(k)}{\tau(k)} = 0$. **(1p)**

2. a) Mulțimea \mathcal{A} conține matricele de forma $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \alpha\varepsilon^2 \end{pmatrix}$, cu $\alpha \in \mathbb{C}^*$ și $\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \varepsilon^3 = 1$. **(2p)**

b) Fie $f(x) = x^3 - \text{Tr}(A)x^2 + \text{Tr}(A^*)x - \det A$ polinomul caracteristic al matricii A . **(1p)**

Dacă $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sunt rădăcinile lui f , atunci $\text{Tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \text{Tr}(A^2) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 0$ și $\text{Tr}(A^*) = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 = 0$, de unde rezultă că $\text{Tr}(A) = 0$, deci $f(x) = x^3 - \det A$. **(2p)**

Dacă A ar fi inversabilă, din $A^2 = AB$ ar rezulta $A = B$, contradicție, deci $\det A = 0$ și atunci $f_A(x) = x^3$, de unde $A^3 = O_3$. **(2p)**

Deoarece $A^2 = AB$, rezultă $A^2B = A^3 = O_3$ și, apoi, $AB^2 = O_3$. Dacă B ar fi inversabilă, ar rezulta $A = O_3$, contradicție, deci $\det B = 0$.

Întrucât polinomul caracteristic al lui B este $g(x) = x^3 - \det B$ (ca mai sus), rezultă $g(x) = x^3$, deci $B^3 = O_3$. **(2p)**

3. a) Prin inducție se demonstrează că $a_n \in (0, 1)$ pentru orice $n \geq 1$, deci $(a_n)_{n \geq 1}$ este mărginit.

Cum $a_{n+1} - a_n = -\sin^2 a_n < 0, \forall n \geq 1$, rezultă că $(a_n)_{n \geq 1}$ este strict descrescător și, fiind și mărginit, este convergent. Notând $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ($0 \leq \lambda < 1$), prin trecere la limită în relația de recurență se obține $\lambda = 0$. **(1p)**

Întrucât

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) - n}{\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \left(\frac{a_n}{\sin a_n} \right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - a_n \cdot \left(\frac{\sin a_n}{a_n} \right)^2 \right) \cdot \left(\frac{a_n}{\sin a_n} \right)^2 = 1,$$

conform Lemei Cesaro-Stolz rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{a_n}} = 1$, adică $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 1$. **(2p)**

b) Pentru orice $p \in \mathbb{N}$ șirul $(b_n)_{n \geq 1}$ este strict crescător, deci are limită în $\overline{\mathbb{R}}$.

Pentru $p = 0$ avem $b_n = n \rightarrow \infty$. **(1p)**

Pentru $p = 1$, să observăm că, întrucât $na_n > 0, \forall n \geq 1$, și $na_n \rightarrow 1$, există $a \in (0, 1)$ astfel încât $na_n > a$, pentru orice $n \geq 1$. Atunci

$$b_n \geq a \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) \rightarrow \infty,$$

de unde rezultă că $b_n \rightarrow \infty$. **(1p)**

Dacă $p \geq 2$, din faptul că $\frac{\sin a_n}{a_n} > 0, \forall n \geq 1$, și $\frac{\sin a_n}{a_n} \rightarrow 1$, rezultă că există $b \in (0, 1)$ astfel încât $\frac{\sin a_n}{a_n} > b$, pentru orice $n \geq 1$. Atunci, pentru orice $n \geq 1$, avem:

$$b_n \leq a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \leq \frac{1}{b^2} \sum_{k=1}^n \sin^2 a_k = \frac{1}{b^2} \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) = \frac{a_1 - a_{n+1}}{b^2} < \frac{a_1}{b^2},$$

deci șirul $(b_n)_{n \geq 1}$ este mărginit. Ca urmare, $(b_n)_{n \geq 1}$ este convergent pentru orice $p \geq 2$. **(2p)**

4. a) Cum $a_k \geq a_1 \cdot k! \geq k!$, $\forall k \geq 1$, rezultă că $|x_n| \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} < 2$, deci șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este mărginit.

(2p)

Pentru orice $n \geq 1$, avem

$$x_{2n+1} - x_{2n-1} = \frac{1}{a_{2n}} - \frac{1}{a_{2n+1}} > 0 \quad \text{și} \quad x_{2n+2} - x_{2n} = \frac{1}{a_{2n+2}} - \frac{1}{a_{2n+1}} < 0,$$

deci $(x_{2n-1})_{n \geq 1}$ este strict crescător, iar $(x_{2n})_{n \geq 1}$ este strict descrescător.

Fiind monotone și mărginite, șirurile $(x_{2n-1})_{n \geq 1}$ și $(x_{2n})_{n \geq 1}$ sunt convergente. Notând $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n-1}$ și

$\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n}$, din $0 < x_{2n} - x_{2n-1} = \frac{1}{a_{2n}} \rightarrow 0$, rezultă că $\alpha = \beta$, deci șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent. **(1p)**

b) Presupunem că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{p}{q}$, cu $p, q \in \mathbb{Z}$, $q > 0$. Pentru orice $n \geq 1$ avem $x_{2n-1} < \frac{p}{q} < x_{2n}$, deci

$0 < \frac{p}{q} - x_{2n-1} < x_{2n} - x_{2n-1} = \frac{1}{a_{2n}}$. Ca urmare,

$$0 < \frac{p}{q} - x_{2q-1} < \frac{1}{a_{2q}} \Leftrightarrow 0 < pa_{2q} - qa_{2q} \cdot \sum_{k=1}^{2q-1} \frac{(-1)^k}{a_k} < 1,$$

contradicție cu $pa_{2q} - qa_{2q} \cdot \sum_{k=1}^{2q-1} \frac{(-1)^k}{a_k} \in \mathbb{Z}$ (căci $a_k \mid a_{2q}$, pentru orice $k = \overline{1, 2q-1}$). Ca urmare, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

(4p)

Clasa a XII-a

1. Din $xy = y^2x$, obținem

$$xyx^{-1} = y^2 \Rightarrow y^4 = (xyx^{-1}) \cdot (xyx^{-1}) = xy^2x^{-1} = x(xy x^{-1})x^{-1} = x^2yx^{-2}. \quad (3p)$$

Analog, $y^8 = x^3yx^{-3}$, $y^{16} = x^4yx^{-4}$, $y^{32} = x^5yx^{-5}$, $y^{64} = x^6yx^{-6}$, $y^{128} = x^7yx^{-7} = y$, deci $y^{127} = e$. (3p)
Cum 127 este număr prim și $y \neq e$, rezultă $\text{ord}(y) = 127$. (1p)

2. Vom demonstra mai întâi că, dacă G este comutativ, atunci $G_a G_b = G_d$.

Cum $(a, b) = d$, există $v, w \in \mathbb{Z}$ astfel încât $d = av + bw$. Dacă $x^d \in G_d$, avem $x^d = (x^v)^a (x^w)^b \in G_a G_b$, deci $G_d \subset G_a G_b$.

Întrucât $a = da_1$, $b = db_1$, $a_1, b_1 \in \mathbb{Z}$, pentru orice $x, y \in G$ avem $x^a y^b = (x^{a_1} y^{b_1})^d \in G_d$, deci $G_a G_b \subset G_d$. (3p)

(\Leftarrow) Dacă $(n, d) = 1$, există $u, t \in \mathbb{Z}$ astfel încât $du + nt = 1$, de unde rezultă că, pentru orice $x \in G$, avem $x = x^{du+nt} = (x^u)^d \in G_d$, deci $G \subset G_d \subset G$, adică $G_d = G_a G_b = G$. (2p)

(\Rightarrow) Dacă $G_a G_b = G$, atunci $G_d = G$. Notând $(n, d) = s$ și presupunând $s \neq 1$, din teorema lui Cauchy rezultă că există un element x de ordinul p al lui G , unde p este un divizor prim al lui s . Atunci $x^p = e$, și, cum $s \mid d$, obținem $x^d = e$. Întrucât $x \neq e$, rezultă că $|G_d| \leq n - 1 < |G|$, contradicție. (2p)

3. a) Funcția f este periodică, de perioadă π , și, întrucât

$$(F(x + \pi) - F(x))' = f(x + \pi) - f(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

există $c \in \mathbb{R}$ astfel încât $F(x + \pi) - F(x) = c$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Mai mult, avem $c = F(\pi) - F(0) = \int_0^\pi f(x) dx > 0$.

Funcția $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\Phi(x) = F(x) - \frac{c}{\pi}x$ este derivabilă și periodică, o perioadă a sa fiind π . Deoarece $\Phi(\mathbb{R}) = \Phi([0, \pi])$ și Φ este continuă pe $[0, \pi]$, rezultă că Φ este mărginită.

Funcția F este derivabilă și $F'(x) = f(x) \geq \cos^2(\cos x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, deci F este strict crescătoare. (1p)

Având în vedere că $F(x) = \Phi(x) + \frac{c}{\pi}x, \forall x \in \mathbb{R}$, și că Φ este mărginită, rezultă că $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} F(x) = \pm\infty$. Cum F are proprietatea lui Darboux, rezultă că $F(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, deci F este surjectivă. (2p)

b) Întrucât $xF\left(\frac{1}{x}\right) = x\Phi\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{c}{\pi}$, pentru orice $x \neq 0$, rezultă că $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \frac{c}{\pi}$.

Dacă $a \neq \frac{c}{\pi}$, atunci g are în origine o discontinuitate de speța I, deci nu are proprietatea lui Darboux, și atunci nu admite primitive.

Dacă $a = \frac{c}{\pi}$, atunci g este continuă, deci admite primitive. Rămâne să determinăm valoarea lui c . Avem

$$c = \int_0^\pi f(x) dx = \int_0^{\pi/2} f(x) dx + \int_{\pi/2}^\pi f(x) dx.$$

Cu schimbarea de variabilă $\varphi : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [0, \frac{\pi}{2}], x = \varphi(t) = \pi - t$, se obține $\int_{\pi/2}^\pi f(x) dx = \int_0^{\pi/2} f(t) dt$,

deci $c = 2 \int_0^{\pi/2} f(x) dx$. (1)

Considerând funcția $u : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [0, \frac{\pi}{2}], x = u(y) = \frac{\pi}{2} - y$, rezultă

$$\int_0^{\pi/2} f(x) dx = \int_{u(\pi/2)}^{u(0)} f(x) dx = \int_{\pi/2}^0 f\left(\frac{\pi}{2} - y\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2} - y\right)' dy = \int_0^{\pi/2} f\left(\frac{\pi}{2} - y\right) dy. \quad (2)$$

Din (1) și (2) se obține

$$c = \int_0^{\pi/2} \left(f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \right) dx = 2 \int_0^{\pi/2} f(x) dx = \pi.$$

În concluzie, g admite primitive pe \mathbb{R} dacă și numai dacă $a = 1$. **(4p)**

4. (\Leftarrow) Dacă f este constantă, atunci șirul $\left(\int_0^1 f(x+n) dx\right)_{n \geq 1}$ este constant, deci convergent. **(1p)**

(\Rightarrow) Notăm $I_n = \int_0^1 f(x+n) dx$, $n \geq 1$ și $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Fie $T \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $T > 0$, o perioadă a lui f și $x_0 \in \mathbb{R}$. Întrucât mulțimea $A = \{k - hT \mid k, h \in \mathbb{N}\}$ este densă în \mathbb{R} , există un șir $(a_n)_{n \geq 1} \subset A \setminus \{x_0\}$, $a_n = k_n - h_n T \rightarrow x_0$, cu $(k_n)_{n \geq 1}$ strict crescător. Rezultă că:

$$I_{k_n} = \int_0^1 f(x+k_n) dx = \int_0^1 f(x+k_n - h_n T) dx = \int_0^1 f(x+a_n) dx = \int_{a_n}^{a_n+1} f(t) dt = F(a_n+1) - F(a_n),$$

unde F este o primitivă a lui f . Atunci

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} I_{k_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (F(a_n+1) - F(a_n)) = F(x_0+1) - F(x_0). \quad \mathbf{(3p)}$$

Cum $x_0 \in \mathbb{R}$ a fost ales arbitrar, obținem $F(x+1) - F(x) = \lambda$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Prin derivare, rezultă că $f(x+1) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci numerele întregi sunt perioade ale funcției f . În consecință, elementele mulțimii A sunt perioade ale lui f .

Dacă $x \in \mathbb{R}$ și $(u_n)_n \subset A$, $u_n \rightarrow x$, atunci $f(u_n) = f(0)$, pentru orice $n \geq 1$, de unde rezultă că $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = f(0)$, adică f este constantă. **(3p)**

Juniori II

1. a) Cu teorema împărțirii cu rest, obținem $n = a \cdot n_1 + b$, $n = b \cdot n_2 + c$ și $n = 2c \cdot n_3 + a$, unde n_1, n_2, n_3 sunt numere naturale. În plus, cum restul este mai mic decât împărțitorul, rezultă $b < a$, $c < b$ și $a < 2c$, deci $c < b < a < 2c$. **(2p)**

Ca urmare, între c și $2c$ sunt cel puțin două numere naturale distincte, ceea ce impune $c \geq 3$. Vom arăta că pentru $c = 3$ se obține o soluție. Cum $3 < b < a < 6$, rezultă că $b = 4$ și $a = 5$, de unde obținem:

$$\begin{cases} n = 5n_1 + 4 \\ n = 4n_2 + 3 \\ n = 6n_3 + 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n + 1 = 5(n_1 + 1) \\ n + 1 = 4(n_2 + 1) \\ n + 1 = 6(n_3 + 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 \mid n + 1 \\ 4 \mid n + 1 \\ 3 \mid n + 1 \end{cases},$$

deci $n + 1$ este divizibil cu 60. Un număr n cu această proprietate este 59. **(3p)**

b) Evident, numerele de forma $59k$, $k \in \mathbb{N}^*$, au proprietatea **(P)**, pentru $a = 5k$, $b = 4k$ și $c = 3k$. **(2p)**

2. Notăm $y_k = 2m + 2p - x_k$, pentru orice $k = \overline{1, p}$. Deoarece $m < x_k < m + 2p$, rezultă $m < 2m + 2p - x_k < m + 2p$ pentru orice $k = \overline{1, p}$. În consecință, x_1, x_2, \dots, x_p și y_1, y_2, \dots, y_p sunt $2p$ numere naturale cuprinse între numerele m și $m + 2p$, adică aflate în mulțimea $\{m + 1, m + 2, \dots, m + 2p - 1\}$. **(3p)**

Cum în această mulțime sunt $2p - 1$ numere naturale distincte, rezultă că există $i, j \in \overline{1, p}$ astfel încât $x_i = y_j$, adică $x_i = 2m + 2p - x_j$, sau echivalent, $x_i + x_j = 2(m + p)$. **(2p)**

Dacă $i \neq j$, am obținut două numere cu suma $2(m + p)$. Dacă $i = j$, se obține $x_i = m + p$. **(2p)**

3. a) Evident. **(1p)** b) $\{1, 10, 10^2, \dots, 10^{10}\}$. **(1p)**

c) Suma cifrelor numerelor de la 1 la 100 ia valori de la 1 la 18. **(1p)**

Pentru fiecare $n = \overline{1, 18}$, notăm A_n mulțimea numerelor cuprinse între 1 și 100 care au suma cifrelor k .

$$\text{Atunci card } A_k = \begin{cases} 3, & \text{pentru } k = 1 \\ k + 1, & \text{pentru } k = 2, 3, \dots, 9 \\ 19 - k, & \text{pentru } k = 10, 11, \dots, 18 \end{cases}.$$

Pentru a determina numărul maxim de elemente ale unei mulțimi *incifrate*, vom construi un lanț de forma $k_1 \mid k_2 \mid \dots \mid k_p$, de elemente din mulțimea $\{1, 2, \dots, 18\}$, astfel încât suma $S = \text{card } A_{k_1} + \text{card } A_{k_2} + \dots + \text{card } A_{k_p}$ să fie maximă. **(1p)**

Evident, $k_p \in \{10, 11, \dots, 18\}$ și $k_{p-1} \in \{1, 2, \dots, 9\}$, întrucât fiecare număr din mulțimea $\{1, 2, \dots, 9\}$ are dublul în mulțimea $\{10, 11, \dots, 18\}$.

Situațiile în care k_p este prim se exclud, întrucât conduc, vizibil, la sume "mici". Să observăm că este mai avantajos să considerăm k_{p-1} un număr "cât mai mare". **(1p)**

Rămân de analizat lanțurile:

$$\left. \begin{array}{l} \bullet 18 - 9 - 3 - 1 \text{ pentru care se obține } S = 18 \\ \bullet 16 - 8 - 4 - 2 - 1 \text{ pentru care se obține } S = 23 \\ \bullet 15 - 5 - 1 \text{ pentru care se obține } S = 13 \\ \bullet 14 - 7 - 1 \text{ pentru care se obține } S = 16 \\ \bullet 12 - 6 - 3 - 1 \text{ pentru care se obține } S = 21 \\ \bullet 10 - 5 - 1 \text{ pentru care se obține } S = 18 \end{array} \right\} \text{ (2p)}$$

Numărul maxim de elemente al unei mulțimi *incifrate* este 23, și cuprinde numerele cu suma cifrelor 1, 2, 4, 8 și 16, adică numerele:

$$\{1, 10, 100, 2, 11, 20, 4, 13, 22, 31, 40, 8, 17, 26, 35, 44, 53, 62, 71, 80, 79, 88, 97\}.$$

Observație. Pentru indicarea mulțimii maximale/cardinalului maximal, fără demonstrație, s-au acordat **2p**.

4. Fie segmentele $s_1 = A_1B_1$, $s_2 = A_2B_2$, ..., $s_{10} = A_{10}B_{10}$, astfel încât A_1, A_2, \dots, A_{10} să se găsească pe dreaptă în această ordine, de la stânga la dreapta. **(1p)**

Dacă segmentele s_1, s_2, s_3 ar intersecta fiecare segmentul s_4 , atunci s_1, s_2, s_3 și s_4 ar conține toate pe A_4 și ar fi adevărată afirmația a). Dacă nu, notăm cu I_1 acel segment dintre s_1, s_2 și s_3 care nu se intersectează cu s_4 , deci nici cu s_5, s_6, \dots, s_{10} . **(2p)**

Considerăm acum segmentele s_4, s_5, s_6 . Dacă toate ar intersecta pe s_7 , atunci s_4, s_5, s_6, s_7 ar avea punctul comun A_7 , deci afirmația a) ar fi adevărată. Dacă nu, notăm cu I_2 acel segment dintre s_4, s_5, s_6 care nu are punct comun cu s_7 . **(2p)**

Analog, dacă segmentele s_7, s_8, s_9 nu intersectează fiecare pe s_{10} , determinăm I_3 ca unul dintre segmentele s_7, s_8, s_9 care nu are puncte comune cu s_{10} . Am obținut astfel segmentele I_1, I_2, I_3 și s_{10} disjuncte două câte două. **(2p)**